

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 iulie 2026

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ și $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_2 - (n-3)a_1}{2}$, pentru orice număr natural nenul n .
- 7p a) Arătați că $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$.
- 8p b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.
2. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB < AC$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează latura BC în punctul D . Paralela dusă prin punctul D la dreapta AB intersectează latura AC în punctul E , iar paralela dusă prin punctul D la dreapta AC intersectează latura AB în punctul F .
- 7p a) Arătați că $\frac{BM}{BF} = \frac{CM}{CE}$, unde M este punctul de intersecție a dreptelor EF și BC .
- 8p b) Știind că $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$, demonstrați că măsura unghiului BAC este egală cu 120° .
3. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 6 \\ x + 2ay + 6z = b \\ x + 2y + 6az = -3 \end{cases}$$
, unde a și b sunt numere reale.
- 7p a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 8p b) Știind că $a = -2$ și că sistemul este compatibil, determinați soluția $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a sistemului, pentru care are loc relația $3z_0^3 = 2y_0 - x_0 + b + 3$.
4. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln^2 x}{1 + \ln^2 x}$.
- 7p a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 8p b) Determinați numărul real a pentru care aria suprafeței plane determinate de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = e^{\sqrt{3}}$ este egală cu $a - 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VI-a
1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate - Identificarea unui număr întreg în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperaturi, altitudini, golaveraje, debit/credit) - Reprezentarea pe axa numerelor a opusului unui număr întreg; modulul ca distanță pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului - Identificarea unor contexte practic-aplicative sau teoretice care folosesc ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi

2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor - Compararea numerelor întregi, pornind de la reprezentările acestora pe axa numerelor - Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere întregi - Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere întregi: adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere cu exponent natural - Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații sau a unei inecuații în mulțimea numerelor întregi
3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi - Aplicarea unor proprietăți ale operațiilor cu numere întregi pentru optimizarea calculelor numerice - Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcule numerice) - Utilizarea eficientă a metodelor de determinare a unei necunoscute dintr-o ecuație sau inecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate/inegalitate)
4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi - Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului, utilizarea lui 0 ca factor în produse de numere) - Scrierea unei ecuații/inecuații echivalente cu o ecuație/inecuație dată - Redactarea demersului de rezolvare a unor ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi (inclusiv verificarea soluțiilor) - Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor întregi - Exprimarea unor caracteristici ale modulului, derivate din definiția acestuia ($x = a$, $x < a$, $x \leq a$, unde a și x sunt numere întregi)
5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi - Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere întregi - Analizarea unor consecințe posibile ce decurg din modificarea unui set de ipoteze în probleme referitoare la numere întregi - Încadrarea soluției unei ecuații într-o mulțime de numere întregi, fără a efectua calcule
6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului - Transpunerea unei situații date în limbaj matematic, utilizând ecuații sau inecuații - Formularea de probleme cu numere întregi pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat - Formularea unor probleme echivalente cu o problemă dată în contextul numerelor întregi

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere.	3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTEGRI • Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi • Adunarea numerelor întregi, proprietăți; scăderea numerelor întregi • Înmulțirea numerelor întregi, proprietăți • Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului • Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri • Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor • Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Mulțimea numerelor întregi**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;

- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
14 iulie 2026

Probă scrisă
MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = a_2$, deci $a_1 = 2a_2 - a_3$	3p
	$\frac{(2a_2 - a_3) + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3a_2 - (2a_2 - a_3)}{2}$, deci $3a_2 + a_4 = 2a_2 + 2a_3$, de unde obținem $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$	4p
	b) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{(n-1)a_2 - (n-3)a_1}{2} = n \cdot \frac{(n-1)(a_2 - a_1) + 2a_1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot r + na_1$, pentru orice $n \geq 1$, unde $r = a_2 - a_1$ Pentru $n \geq 2$, avem $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot r + (n-1)a_1$, de unde obținem $\left(\frac{n(n-1)}{2} \cdot r + na_1 \right) - a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot r + (n-1)a_1$, deci $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru orice $n \geq 2$ Cum $a_1 = a_1 + (1-1)r$, rezultă că $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru orice număr natural nenul n , deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică	3p 3p 2p
2.	a) $AFDE$ este paralelogram și, cum AD este bisectoarea unghiului EAF , rezultă că $AFDE$ este romb	3p
	Din teorema lui Menelaus obținem $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$ și, cum $FA = EA$, rezultă că $\frac{BM}{BF} = \frac{CM}{CE}$	4p
	b) $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ și, cum $\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{FA}$, rezultă că $\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FA}$ Obținem $\frac{AB + AC}{AC} = \frac{FB + FA}{FA} \Leftrightarrow \frac{AB + AC}{AC} = \frac{AB}{FA} \Leftrightarrow \frac{1}{FA} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC}$, deci $\frac{1}{FA} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD} \Rightarrow AD = FA$, deci $\triangle AFD$ este echilateral, de unde obținem $\sphericalangle BAC = 120^\circ$	3p 3p 2p
3.	a) $\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 1 & 2a & 6 \\ 1 & 2 & 6a \end{vmatrix} = 12(a-1)^2(a+2)$, pentru orice număr real a	3p
	Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $12(a-1)^2(a+2) \neq 0$, de unde obținem $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	4p
	b) Pentru $a = -2$, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $b = -3$ Soluțiile sistemului sunt de forma $(x_0, y_0, z_0) = (6\lambda - 3, 3\lambda, \lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ $3\lambda^3 = 2 \cdot 3\lambda - 6\lambda + 3$ și, cum $\lambda \in \mathbb{R}$, obținem $\lambda = 1$, deci $(x_0, y_0, z_0) = (3, 3, 1)$	3p 2p 3p

4.	a) $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)^2}$, $x \in (0, +\infty)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$	3p
	Pentru $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci funcția f este descrescătoare pe $(0, 1]$	2p
	Pentru $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci funcția f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	b) $\mathcal{A} = \int_e^{e^{\sqrt{3}}} g(x) dx = \int_e^{e^{\sqrt{3}}} \frac{\ln^2 x}{x(1 + \ln^2 x)} dx =$ $= \int_e^{e^{\sqrt{3}}} \frac{\ln^2 x}{1 + \ln^2 x} \cdot (\ln x)' dx = \int_e^{e^{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{1}{1 + \ln^2 x}\right) \cdot (\ln x)' dx = (\ln x - \arctg(\ln x)) \Big _e^{e^{\sqrt{3}}} =$ $= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \Rightarrow a - 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$, de unde obținem $a = -\frac{\pi}{12}$	2p 3p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<i>Itemul de tip completare elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p